Нейрондық желілердің сызықтық түрлендірулері.

Дәріс 5

Дәріс мақсаты:

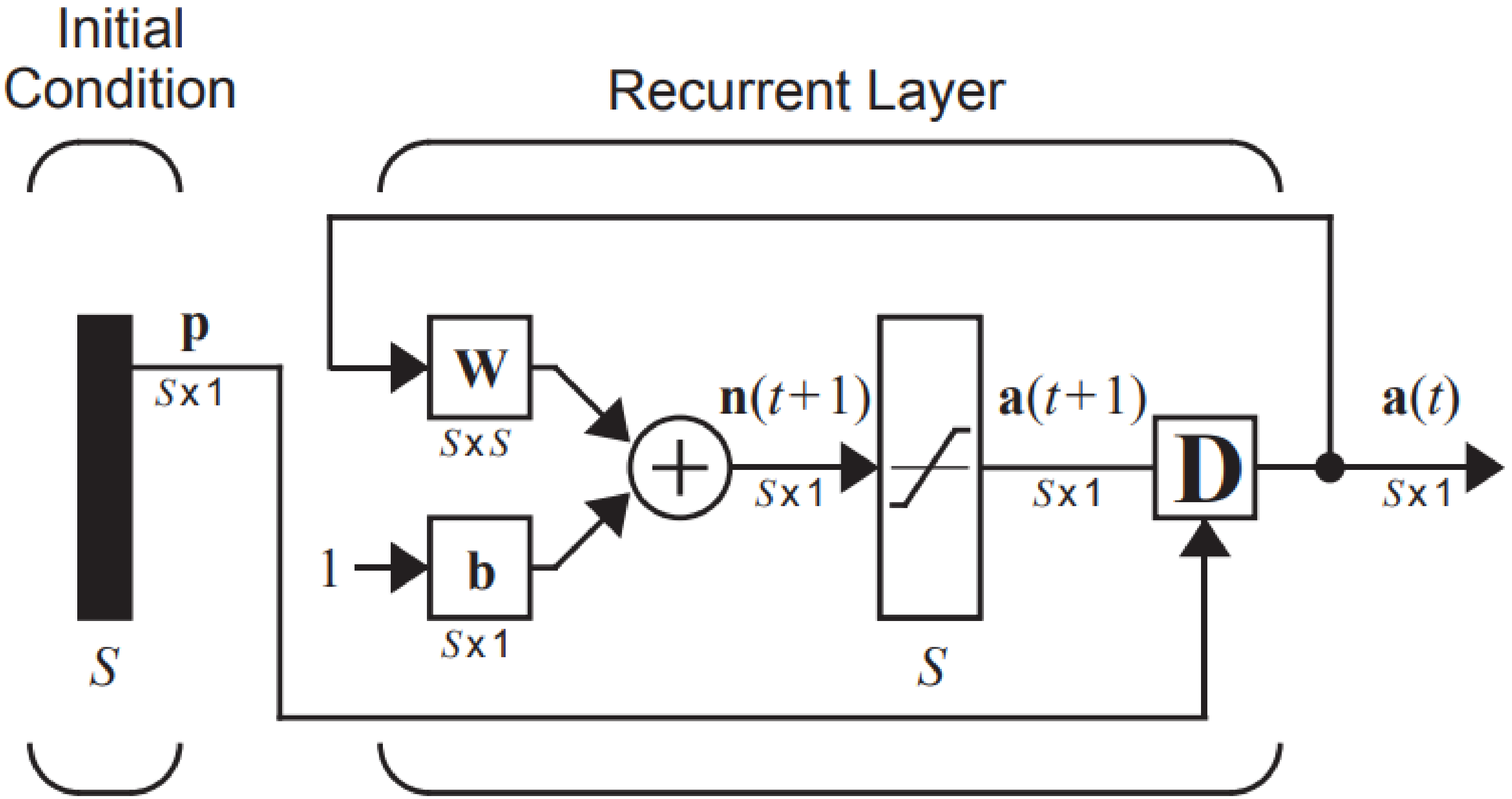
- Алдыңғы дәрістерде көргеніміздей, кіріс векторын салмақ матрицасына көбейту нейрондық желілер орындайтын негізгі операциялардың бірі болып табылады. Бұл операция сызықтық түрлендірудің мысалы болып табылады. Біз жалпы сызықтық түрлендірулерді зерттеп, олардың негізгі сипаттамаларын анықтағымыз келеді. Осы тарауда қарастырылатын меншікті мәндер, меншікті векторлар және негіздің өзгеруі сияқты ұғымдар өнімділікті үйрену (соның ішінде Уидроу-Хофф ережесі және кері таралу) және Хопфилд желісінің конвергенциясы сияқты нейрондық желінің негізгі тақырыптарын түсіну үшін маңызды болады.

Хопфилд желісі

$$\mathbf{a}(t+1) = satlin(\mathbf{W}\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}) .$$

Әрбір итерацияда желінің шығысы W салмақ матрицасына қайтадан көбейтілетініне назар аударыңыз. Бұл қайталанатын операцияның әсері қандай? Желінің шығысы қандай да бір тұрақты күй мәніне жақындайтынын, шексіздікке өтетінін немесе тербелетінін анықтай аламыз ба?

Хопфилд желісі



$\mathbf{a}(0) = \mathbf{p}$ $\quad$ $\mathbf{a}(t+1) = \mathbf{satlins}(\mathbf{Wa}(t) + \mathbf{b})$

Сызықтық түрлендірулер

Түрлендіру үш бөліктен тұрады:

1. $X=\{X_i\}$ домен деп аталатын элементтер жиыны,

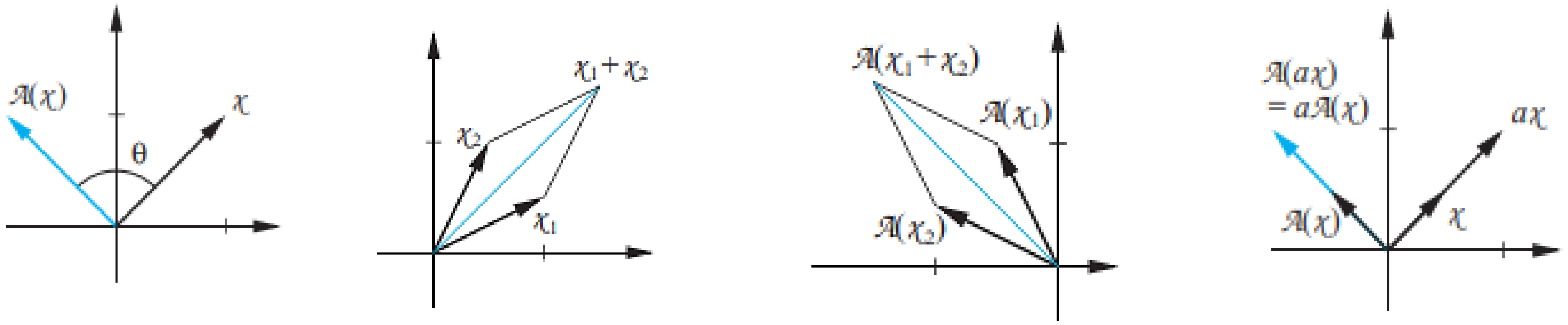
2. $Y=\{y_i\}$ диапазон деп аталатын элементтер жиыны және

3. $x_i \in X$ әрбір элементіне $y_i \in У$ сәйкестендіретін ереже .

Сызықтық түрлендірулер

A түрлендіруі **сызықты**, егер:

1. *Кез келген* x_1 , x_2 ϵ X үшін $\boldsymbol{A(x_1 + x_2)=A(x_1)+A(x_2)}$
2. *Кез келген* x ϵ X және α ϵ R үшін $\boldsymbol{A(\alpha x)= \alpha A(x)}$



Матрицалық жазбалар

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \text{ and } \mathcal{Y} = \sum_{i=1}^{m} y_i u_i .$$

$$Y \; (\mathcal{A}: X \to Y).$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$$

$$\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{m} y_i u_i .$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{A}(v_j) = \sum_{i=1}^{m} y_i u_i .$$

$$\mathcal{A}(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i .$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{m} y_i u_i .$$

Матрицалық жазбалар

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i u_i \,.$$

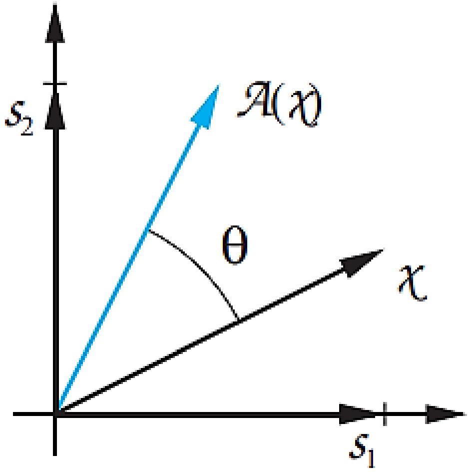
$$\sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i \right) = 0.$$

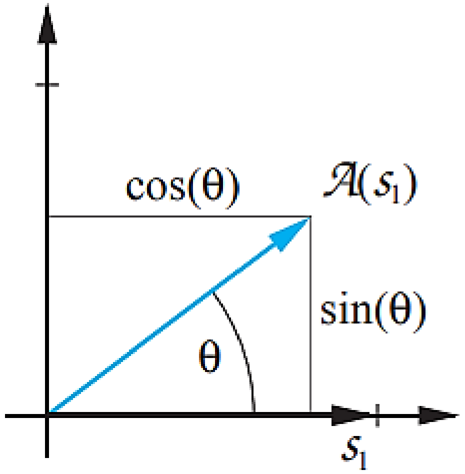
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i \,.$$

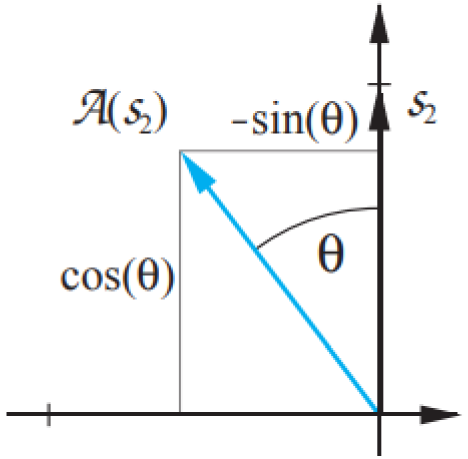
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Мысал

$$(X = Y = \Re^2),\qquad (u_i = v_i = s_i)$$







$$\mathcal{A}(s_1) = \cos(\theta)s_1 + \sin(\theta)s_2 = \sum_{i=1}^{2} a_{i1}s_i = a_{11}s_1 + a_{21}s_2,$$

$$\mathcal{A}(s_2) = -\sin(\theta)s_1 + \cos(\theta)s_2 = \sum_{i=1}^{2} a_{i2}s_i = a_{12}s_1 + a_{22}s_2,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Негіздің өзгеруі

$\mathcal{X} \in X$ can be written

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{V}_i , \qquad \mathcal{Y} = \sum_{i=1}^{m} y_i \mathcal{U}_i .$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} .$$

$\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x'_i t_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{m} y'_i w_i.$$

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix},$$

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} v_j.$$

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ji} u_j.$$

$$\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_{1i} \\ w_{2i} \\ \vdots \\ w_{mi} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A'x'} = \mathbf{y'}.$$

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \ldots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix}.$$

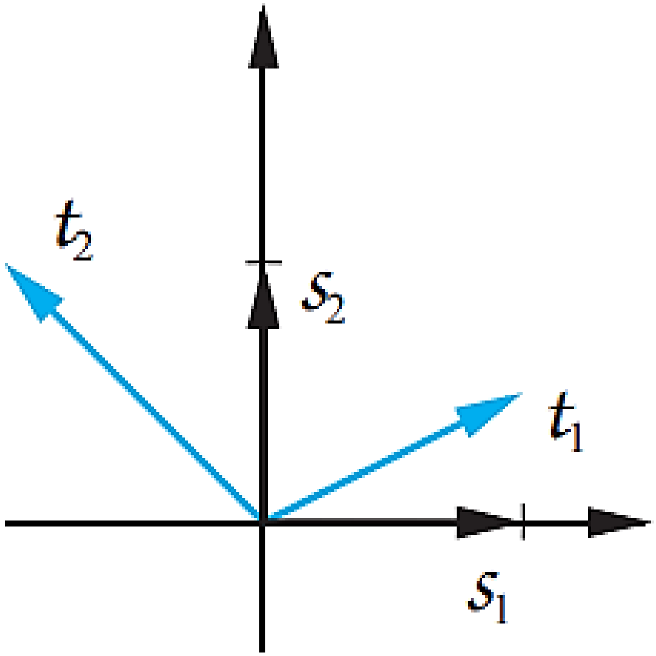
$$\mathbf{x} = x'_1\mathbf{t}_1 + x'_2\mathbf{t}_2 + \cdots + x'_n\mathbf{t}_n = \mathbf{B}_t\mathbf{x'}.$$

$$\mathbf{B}_w = \left[\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_m\right].$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_w \mathbf{y}',$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_t \mathbf{x}' = \mathbf{B}_w \mathbf{y}'.$$

$$[\mathbf{B}_w^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}_t] \mathbf{x}' = \mathbf{y}'. \qquad \mathbf{A}' = [\mathbf{B}_w^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}_t].$$



$$t_1 = s_1 + 0.5 s_2 ,$$

$$t_2 = -s_1 + s_2 .$$

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{B}_w = \mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} .$$

$$\mathbf{A'} = [\mathbf{B}_w^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}_t] = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3\sin\theta + \cos\theta & -4/3\sin\theta \\ \frac{5}{6}\sin\theta & -1/3\sin\theta + \cos\theta \end{bmatrix}.$$

$$\theta = 30°.$$

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 1.033 & -0.667 \\ 0.417 & 0.699 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.616 \\ 0.933 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}'\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1.033 & -0.667 \\ 0.416 & 0.699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.033 \\ 0.416 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.616 \\ 0.933 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.616 \\ 0.933 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.033 \\ 0.416 \end{bmatrix},$$

Меншікті мәндер және меншікті векторлар

$$\mathcal{A}: X \rightarrow X \qquad z \in X$$

$$\mathcal{A}(z) = \lambda z$$

$$\mathbf{Az} = \lambda \mathbf{z}, \qquad [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}]\mathbf{z} = \mathbf{0}. \qquad |[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}]| = 0.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \qquad \left| \begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + ((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0.$$

$$\lambda_1 = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \lambda_2 = \cos\theta - j\sin\theta.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\left| \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0,$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0,$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -2.$$

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$z_{22} = -z_{12}.$$

$$\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{z}_1 ,$$

$$\mathbf{A}\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathbf{z}_2 .$$

Диагонализация

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \dots & \mathbf{z}_n \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$